Topologia

Lista 3 (przestrzeń topologiczna, topologia podprzestrzeni, operacje na zbiorach)

Zad 1. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X = \{a, b, c\}$:

a) $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$, b) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$, c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$, d) $\{\emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$.

Zad 2. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej X, to jest takiej w której topologia pochodzi od metryki,

a) zbiór jednoelementowy jest domknięty, tzn. X jest przestrzenią $\mathcal{T}_1$

b) dwa różne punkty posiadają rozłączne otoczenia otwarte, tzn. X jest przestrzenią $\mathcal{T}_2$.

Zad 3. Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych. Sprawdzić, które z danych rodzin są topologiami na X:

$$F_1 = \{\{1, 2, 3, ..., n\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}, \qquad F_2 = \{\{1, 3, 5, ..., 2n-1\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\},$$
$$F_3 = \{A \subset X : |A| < \infty \text{ lub } A = X\}, \quad F_4 = \{A \subset X : |X \setminus A| < \infty \text{ lub } A = \emptyset\}$$

Dla rodzin będących topologiami wyznaczyć rodziny zbiorów domkniętych i sprawdzić, czy pochodzą one od metryki?

Zad 4. Opisać najmniejszą topologię na płaszczyznie $X = \mathbb{R}^2$, w której wszystkie proste są zbiorami domkniętymi. Porównać tę topologię z topologią euklidesową.

Zad 5. Niech (Y, d) będzie podprzestrzenią przestrzeni metrycznej (X, d). Niech τ_X oznacza topologię na X i τ_Y topologię na Y. Pokazać, że $\tau_Y = \{G \cap Y : G \in \tau_X\}$.

Zad 6. Sprawdzić, że jeżeli (X, τ) jest przestrzenią topologiczną i $Y \subset X$, to para (Y, τ_Y), gdzie $\tau_Y = \{G \cap Y : G \in \tau\}$ jest przestrzenią topologiczną. Przestrzeń (Y, τ_Y) nazywamy *podprzestrzenią* przestrzeni topologicznej (X, τ).

Zad 7. Niech $Y \subset \mathbb{R}$ będzie wyposażony w topologię indukowaną z prostej euklidesowej $X = \mathbb{R}$.

a) Niech $Y = [0, 1]$. Które ze zbiorów $A_1 = [0, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{2})$, $A_3 = [\frac{1}{3}, 1]$, $A_4 = (0, 1)$ są otwarte, a które domknięte w Y?

b) Niech $Y = (0, 1)$. Które ze zbiorów $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (0, \frac{1}{2})$, $A_3 = [\frac{1}{3}, 1)$, $A_4 = [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ są otwarte, a które domknięte w Y?

c) Niech $Y = \mathbb{N}$. Wypisać topologię na X.

d) Niech $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Wyznaczyć wszystkie otwarto-domknięte podzbiory jednoelementowe Y.

Zad 8. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Udowodnić, że jeśli zbiór G jest otwarty, to

$$\text{a)} \quad G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}, \qquad \text{b)} \quad \overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}, \qquad \text{c)} \quad \overline{G} = \overline{\mathrm{Int}\,(\overline{G})}.$$

Zad 9. n-tą pochodną $A^{(n)}$ zbioru A określami indukcyjnie wzorami $A^{(1)} = A^d$, $A^{(n)} = (A^{(n-1)})^d$. Udowodnić że dla dowolnych dwóch zbiorów A i B w przestrzeni topologicznej X spełnione są następujące relacje

a) $A \subset B \Rightarrow A^d \subset B^d$, b) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$, c) $(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$, d) $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$,

gdzie w podpunkcie d) zakładamy, że X jest $\mathcal{T}_1$-przestrzenią.

Zad 10. Skonstruować podzbiór prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ posiadający n różnych pochodnych.

Zad 11. W dowolnej przestrzeni topologicznej X udowodnić następujące zależności

a) $A \cup \mathrm{Fr}(A) = \overline{A}$, b) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, c) $\mathrm{Fr}(A) = \big(A \cap \overline{X \setminus A}\big) \cup \big(\overline{A} \setminus A\big)$,

d) $\mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Fr}(A \cup B) \cup \mathrm{Fr}(A \cap B) \cup \big(\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Fr}(B)\big)$, e) $\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}\,(A)) \subset \mathrm{Fr}(A)$,

f) $A = \overline{A} \iff \mathrm{Fr}(A) = A \cap \overline{X \setminus A}$, g) $A = \mathrm{Int}\,(A) \iff \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A$,

h) A jest różnicą dwóch zbiorów domkniętych $\iff$ zbiór $\overline{A} \setminus A$ jest domknięty.